DOI: 10.33184/dokbsu-2020.1.1

Обобщение уточненного порядка

Б. Н. Хабибуллин

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, улица Заки Валиди, 32.

Email: khabib-bulat@mail.ru

Понятие уточненного порядка широко используется в теориях целых, мероморфных, субгармонических и плюрисубгармонических функций. Приводится общая трактовка этого понятия как уточненной функции роста относительно модельной функции роста. Классический уточненный порядок – это ln V, когда V – уточненная функция роста относительно тождественной функции на положительной полуоси. Наше определение использует лишь одно условие. Такая форма определения новая и для классического уточненного порядка.

Ключевые слова: функция роста, уточненный порядок, выпуклая функция, целая функция, субгармоническая функция.

Понятие уточненного порядка возникло в работах Ж. Валирона [1, Ch. III, I.6]. Основные его свойства и применения изложены в [2, гл. I, § 12; 3, гл. II, § 2; 4; 7.4; 5; 6, § 2]. Перейдем к точным определениям и формулировкам. $\mathbb{R}$ – множество *действительных* чисел; $\mathbb{R}^+ \coloneqq \{r \in \mathbb{R}: r \geq 0\}$ – множество *положительных* чисел; $\mathbb{R}^+_* \coloneqq \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ –множество *строго положительных* чисел. Подмножество $R \subset \mathbb{R}$ – *луч положительного направления на* $\mathbb{R}$, если $\emptyset \neq R \neq \mathbb{R}$, а также для любых $r \in R$ и $x \in \mathbb{R}$ из $r \leq x$ следует, что $x \in R$. Далее через $R_\rightarrow$ обозначаем *какой-либо произвольный луч положительного направления на* $\mathbb{R}$. Рассматриваются только функции f с *областью значений* $\mathbb{R}$ и с *областью определения*, включающей в себя $R_\rightarrow$. Функция f обладает некоторым свойством, если она обладает им на $R_\rightarrow$. Функция f *положительная* и пишем $f \geq 0$ (соответственно *строго положительная* и пишем $f > 0$), если $f(R_\rightarrow) \subset \mathbb{R}^+$ (соответственно $f(R_\rightarrow) \subset \mathbb{R}^+_*$). Функция f *возрастающая* (соответственно *строго возрастающая*), если для любых $x_1, x_2 \in R_\rightarrow$ из $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \leq f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) < f(x_2)$). Действия над функциями на луче $R_\rightarrow$ поточечные.

Функция M *выпукла относительно* ln, если функция $m: x \mapsto M(e^x)$ *выпуклая*. Из известных свойств выпуклых функций это означает, что функция M *непрерывна* и существуют *левые* и *правые производные* соответственно M'_- и M'_+, для которых функция $r \mapsto rM'_-(r)$ и/или функция $r \mapsto rM'_+(r)$ возрастающая [7, Ch. I]. Другими словами, по переменной $z \in$

$\mathbb{C}$ на *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ функция $z \mapsto M(|z|)$ *субгармоническая радиальная функция* вне некоторого круга с центром в нуле из $\mathbb{C}$ [7, Ch. III].

Определение. Выпуклую относительно ln функцию $M > 0$ с производной $M' > 0$ и с пределом $\lim\limits_{r\to+\infty} M(r) = +\infty$ называем *модельной функцией роста*. Дифференцируемую функцию $V > 0$ называем *уточненной функцией роста относительно модельной функции роста* M, если существует хотя бы один из пределов

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)} = \lim_{r\to+\infty} \frac{(\ln V(r))'}{(\ln M(r))'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln v(x))'}{(\ln m(x))'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{m(x)v'(x)}{m'(x)v(x)} \in \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

где, как и выше, функция $m\colon x \mapsto M(e^x)$ выпукла, а $v\colon x \mapsto V(e^x)$ дифференцируема, а равенства в (1) при условии существования хотя бы одного из пределов в (1), как нетрудно показать, всегда имеют место.

Использование в (1) вместе с M и V функций $m(\ln r) = M(r)$ и $v(\ln r) = V(r)$ для $r \in \mathbb{R}^+_*$ обусловлено необходимостью вписать в будущем наш подход к функциям роста в общую идеологию по этому направлению, разработанную К. Кизельманом в [8].

Теорема. *Пусть* M *– модельная функция роста,* $V > 0$ *– дифференцируемая функция. Тогда эквивалентны следующие два утверждения:*

Функция V *– уточненная функция роста относительно модельной функции* M.

Для функции

$$\boldsymbol{\rho}_M := \frac{\ln V}{\ln M} \tag{2}$$

существуют два конечных предела

$$\rho := \lim_{r\to+\infty} \boldsymbol{\rho}_M(r) = \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln V(r)}{\ln M(r)} \in \mathbb{R}^+, \tag{3}$$

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M(r)}{M'(r)} \boldsymbol{\rho}'_M(r) \ln M(r) = \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln M(r)}{(\ln M)'(r)} \boldsymbol{\rho}'_M(r) = 0. \tag{4}$$

При выполнении любого из этих двух утверждений имеем равенства

$$\rho := \lim_{r\to+\infty} \boldsymbol{\rho}_M(r) = \lim_{r\to+\infty} \frac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)}. \tag{5}$$

Доказательство. Вычисление производной функции (2) дает

$$\boldsymbol{\rho}'_M = \frac{(V'/V)\ln M - (M'/M)\ln V}{(\ln M)^2} = \frac{M'}{M\ln M}\left(\frac{MV'}{M'V} - \frac{\ln V}{\ln M}\right),$$

откуда по определению (2) функции $\boldsymbol{\rho}_M$ имеем

$$\frac{MV'}{M'V} = \frac{\ln V}{\ln M} + \frac{M\ln M}{M'} \boldsymbol{\rho}'_M = \boldsymbol{\rho}_M + \frac{M}{M'} \boldsymbol{\rho}'_M \ln M. \tag{6}$$

Отсюда, если выполнено утверждение II Теоремы и существуют пределы (3) и (4), то

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)}=\lim_{r\to+\infty}\boldsymbol{\rho}_M(r)+\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)}{M'(r)}\boldsymbol{\rho}'_M(r)\ln M(r)=\rho+0=\rho\in\mathbb{R}^+.$$

Таким образом, существуют пределы (1), справедливо равенство (5) и по Определению выполнено утверждение I Теоремы.

Обратно, пусть выполнено утверждение I Теоремы, т.е. существует предел

$$\rho:=\lim_{r\to+\infty}\frac{(\ln V(r))'}{(\ln M(r))'}\in\mathbb{R}^+. \tag{7}$$

Правило Лопиталя [9, теорема 1]**.** *Пусть функции f и g дифференцируемы на некотором луче $R_\to$ положительного направления на $\mathbb{R}$. Если существуют пределы*

$$\lim_{r\to+\infty}|g(r)|=+\infty,\ \lim_{r\to+\infty}\frac{f'(r)}{g'(r)}=:L\in\{-\infty\}\cup\mathbb{R}\ \cup\{+\infty\}, \tag{8}$$

то существует предел

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{f(r)}{g(r)}=L=\lim_{r\to+\infty}\frac{f'(r)}{g'(r)}. \tag{9}$$

Специфика приведенного варианта правила Лопиталя в том, что в отличие от его традиционных форм здесь в условиях (8) не требуется традиционного условия существования бесконечного предела $\lim\limits_{r\to+\infty}|f(r)|=+\infty$ для функции f из числителей в (8) и (9).

Применим правило Лопиталя к функциям $g:=\ln M$ и $f:=\ln V$ с $L:=\rho$ из (7). Тогда по свойствам модельной функции роста M из Определения в обозначении (2) существует

$$\lim_{r\to+\infty}\boldsymbol{\rho}_M(r)=\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln V(r)}{\ln M(r)}=\lim_{r\to+\infty}\frac{f(r)}{g(r)}=L=\rho.$$

Таким образом, доказано существование предела (3) из утверждения II, а также установлено равенство (5). Наконец, из равенств (6) и (5) получаем

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)}{M'(r)}\boldsymbol{\rho}'_M(r)\ln M(r)=\lim_{r\to+\infty}\boldsymbol{\rho}_M(r)-\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)}=\rho-\rho=0,$$

что дает существование предела (4), равного нулю, и завершает доказательство импликации I ⇒ II. Теорема доказана.

Напомним классическое определение уточненного порядка. Дифференцируемая функция $\boldsymbol{\rho}\geq 0$, определенная на луче $R_\to\subset\mathbb{R}^+$, называется *уточненным порядком в смысле Валирона* [1–6], если существуют два конечных предела

$$\rho:=\lim_{r\to+\infty}\boldsymbol{\rho}(r)\in\mathbb{R}^+,\ \lim_{r\to+\infty}r\boldsymbol{\rho}'(r)\ln r=0. \tag{10}$$

Следствие. *Пусть функция* $\boldsymbol{\rho} \geq 0$ *дифференцируема на луче* $R_{\rightarrow} \subset \mathbb{R}^{+}$. *Тогда эквивалентны следующие два утверждения:*

I. $\boldsymbol{\rho}$ *– уточнённый порядок в смысле Валирона и* $\rho := \lim\limits_{r\to+\infty} \boldsymbol{\rho}(r) \in \mathbb{R}^{+}$, *как в первом равенстве из* (10).

II. *Функция* $V(r) \coloneqq r^{\boldsymbol{\rho}(r)}$, $r \in R_{\rightarrow}$, *– уточнённая функция роста относительно тождественной модельной функции роста* $M \coloneqq id\colon r \mapsto r$, *что означает существование хотя бы одного предела из* (1), *а значит и каждого предела в* (1):

$$\rho = \lim_{r\to+\infty} \frac{rV'(r)}{V(r)} = \lim_{r\to+\infty} \frac{(\ln V(r))'}{(\ln r)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln v(x))'}{(\ln e^{x})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{v'(x)}{v(x)} \in \mathbb{R}^{+}, \tag{11}$$

где, как и прежде в Определении, $v(x) := V(e^{x})$, $x \in \ln R_{\rightarrow} := \{\ln r : r \in R_{\rightarrow}\}$.

Доказательство. Утверждение I Следствия – это, ввиду определения уточнённого порядка (10), в точности утверждение II Теоремы при $M \coloneqq id$, где соотношения (3) и (4) – это соответственно первое и второе соотношения в (10). Утверждение II Следствия совпадает в случае $M \coloneqq id$ с утверждением I Теоремы. Величина ρ в (11) совпадает с величиной $\rho := \lim\limits_{r\to+\infty} \boldsymbol{\rho}(r) \in \mathbb{R}^{+}$ из утверждения I Следствия по равенству (5) Теоремы. Тем самым, Следствие доказано.

Примеры. Опишем широкий класс модельных функций роста, тесно связанных с важнейшими характеристиками роста субгармонических функций. Пусть u – произвольная субгармоническая функция на $\mathbb{C}$, отличная от тождественной постоянной; $r \in \mathbb{R}_{*}^{+}$,

$$\boldsymbol{C}_{u}(r) := \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} u\left(re^{it}\right) dt, \qquad \boldsymbol{B}_{u}(r) := \frac{2}{\pi r^{2}}\int_{0}^{r} \boldsymbol{C}_{u}(s)s ds\,, \quad \boldsymbol{M}_{u}(r) := \sup\{u(z) : |z| = r\}$$

– соответственно *интегральное среднее по окружности и по кругу с центром в нуле радиуса* r, *а также точная верхняя грань на этой окружности функции* u [10, определение 2.6.7]. Тогда эти средние $\boldsymbol{C}_{u}$, $\boldsymbol{B}_{u}$ и верхняя грань $\boldsymbol{M}_{u}$ – модельные функции роста при условии их дифференцируемости при больших $r \in \mathbb{R}_{*}^{+}$ [10, теорема 2.6.8].

Основная теорема. *Пусть* M *– модельная функция роста, а возрастающая строго положительная функция* A *конечного порядка относительно* M *в том смысле, что*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + A(r)\right)}{\ln M(r)} < +\infty.$$

Тогда существует уточнённая функция роста V *относительно модельной функции роста* M, *с которой выполнено предельное соотношение*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{A(r)}{V(r)} = 1.$$

В случае классического уточнённого порядка этот результат давно известен [1; 2, гл. I, § 12, теорема 16; 3, гл. II, § 2, теорема 2.1; 6, § 2, теорема 6] как основной и мотивировавший введение и использование понятия уточнённого порядка в теории роста классов функций. Уже в этом классическом случае доказательство технически довольно трудоёмко. Мы предполагаем привести полное доказательство Основной теоремы позже в ином месте.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

Литература

1. Valiron G. Lecture on the General Theory of Integral Functions. Toulouse, 1923. 234 p.
2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 632.
3. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970. С. 591.
4. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular variation. Encyclopedia Math. Appl., 27. Cambrige: Cambrige University Press, 1987. 494 p.
5. Гришин А. Ф., Малютина Т. И. Об уточненном порядке // Комплексный анализ и математическая физика. Красноярск: Красноярский госуниверситет. 1998. С. 10–24.
6. Гришин А. Ф., Поединцева И. В. Абелевы и тауберовы теоремы для интегралов // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26. №3. С. 1–88. English transl.: St. Petersburg Math. J., 26:3 (2015), 357–409.
7. Hörmander L. Notions of Convexity. Progress in Mathematics. Boston: Birkhäuser, 1994. 416 p.
8. Kiselman Ch. O. Order and type as measures of growth for convex or entire functions // Proceedings of the London Mathematical Society (3). 1993. Vol. 66. Pp. 152–186.
9. Taylor A. E. L'Hospital's Rule // American Mathematical Monthly. 1952. Vol. 59, No. 1. Pp. 20–24.
10. Ransford Th. Potential Theory in the Complex Plane. Cambridge: Cambrige University Press, 1995. 232 p.

Статья рекомендована к печати кафедрой высшей алгебры и геометрии Башкирского государственного университета (д-р. ф.-м. наук, проф. Б. Н. Хабибуллин)

A generalization of the proximate order

B. N. Khabibullin

Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Email: khabib-bulat@mail.ru

The concept of proximate order is widely used in the theories of entire, meromorphic, subharmonic and plurisubharmonic functions. We give a general interpretation of this concept as a proximate growth function relative to a model growth function. If a function V is the proximate growth function with respect to the identity function on the positive semi-axis, then the function ln V is the classical proximate order. Our definition uses only one condition. This form of definition is also new for the classical proximate order.

Keywords: growth function, proximate order, convex function, entire function, subharmonic function.