Некоторые точно решаемые задачи о нелинейных колебаниях

М. Б. Губайдуллин*, Д. Г. Латыпов

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, улица Заки Валиди, 32.

**Email: gubm@ramblerl.ru*

Линеаризация широко распространенный прием в теории дифференциальных уравнений. В частности, она применяется при исследовании колебаний с нелинейной возвращающей силой. В данной работе предлагается процедура, дополняющая линеаризацию, в том смысле что в разложении по формуле Тейлора нечетной относительно положения равновесия функции силы вдобавок учитывается слагаемое содержащее куб переменной. Точнее говоря, исходной нелинейной задаче подбором параметров сопоставляется такая нелинейная задача, функция силы в которой имеет такое же разложение по формуле Тейлора, что и в исходной задаче вплоть до слагаемого содержащего куб переменной. Решения полученной задачи явно выписываются через элементарные функции.

Ключевые слова: колебания, линеаризация.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} = f(x);\ x(0) = x_0;\ \dot{x}(0) = y_0. \tag{1}$$

Если при переходе через какую-нибудь точку (положение равновесия) функция $f(x)$ меняет знак с плюса на минус, то при соответствующих начальных условиях данное уравнение описывает колебания вокруг положения равновесия. Без ограничения общности можно считать, что положение равновесия – это точка нуль. Известно, что в данной задаче сохраняется следующая величина (энергия) (см., например, [1, § 2])

$$E = \frac{\dot{x}^2(t)}{2} + U(x) = \frac{\dot{x}^2(0)}{2} + U(0), U(x) = -\int f(x)dx.$$

Удобно считать, что потенциальная энергия *U(0)=0*. В итоге данный первый интеграл энергии позволяет понизить порядок исходного уравнения и свести его квадратуре

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{2(E-U(x))}}. \tag{2}$$

Дальнейшему продвижению к выписыванию решения исходного уравнения в явном виде, как правило мешают два обстоятельства. Во-первых, интеграл в (2) может оказаться не берущимся в элементарных функциях. Во-вторых, могут возникнуть трудности с обращением. Исключительный случай, когда все это удается сделать– линейный, т.е. когда $f(x) = kx$, $k < 0$. То, что линейный случай не является единственным исключением доказывает следующий пример. Нетрудно убедиться, что функция

$$x(t) = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{E}{1+E}}\sin\left(\sqrt{2(1+E)}t\right)\right)$$

является решением уравнения

$$\ddot{x} = -\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\ ;\ x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = y_0 > 0;\ -\frac{\pi}{2} < x(t) < \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Начальные условия не являются ограничительными (общий случай сводится к ним соответствующим сдвигом аргумента t) и использованы из соображений удобства. Отметим, что уравнению (3) соответствует потенциал $U(x) = \tan^2 x$. Уравнение (3) можно обобщить, введя параметры. Уравнение

$$\ddot{x} = -\frac{2\alpha\sin\beta x}{\cos^3\beta x}\ ;\ x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = y_0 > 0;\ -\frac{\pi}{2\beta} < x(t) < \frac{\pi}{2\beta} \tag{4}$$

имеет своим решением функцию

$$x\,(t) = \frac{1}{\beta}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\breve{E}}{1+\breve{E}}}\sin\left(\sqrt{2\alpha\beta(1+\breve{E})}t\right)\right). \tag{5}$$

Здесь $\breve{E}$ не есть энергия в данной задаче. Она связана с ней соотношением $\breve{E} = \beta E/\alpha$, в чем легко убедиться продифференцировав (5) и выразив $\breve{E}$ через $\dot{x}(0)$. Разложим теперь функцию из правой части уравнения (4) по формуле Тейлора

$$\frac{2\alpha\sin\beta x}{\cos^3\beta x} = (-2\alpha\beta)x - \frac{8\alpha\beta^3}{3}\ x^3 + o(x^4) \text{ при } x \to 0.$$

Если нечетная функция из правой части уравнения (1) также разлагается по формуле Тейлора $f(x) = ax + bx^3 + o(x^4)$ при $x \to 0$ и мы хотим, чтобы коэффициенты при соответствующих степенях x совпадали, то следует решить алгебраическую систему уравнений

$$\begin{cases} -2\alpha\beta = a \\ -8\alpha\beta^3 = 3b. \end{cases}$$

При любых отрицательных a и b она имеет единственное решение

$$\alpha = -a\sqrt{\frac{a}{3b}} > 0, \beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3b}{a}} > 0\,.$$

Подставим найденные выражения для α и β в (5). Можно утверждать, что функция

$$x(t) = 2\sqrt{\frac{a}{3b}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\breve{E}}{1+\breve{E}}}\sin\left(\sqrt{-a\left(1+\breve{E}\right)t}\right)\right)\Bigg|_{\breve{E}=-\frac{3\,b}{2a^2}E=-\frac{3by_0^2}{4a^2}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{3b}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3by_0^2}{3by_0^2-4a^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{4a^2-3by_0^2}}{2\sqrt{|a|}}t\right)\right) \tag{6}$$

дает хорошее приближенное решение уравнения

$$\ddot{x} = f(x) = ax + bx^3 + \cdots;\ x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = y_0 > 0.$$

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = -x - \delta x^3;\ \delta > 0;\ x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = y_0.$$

Тогда $a = -1, b = -\delta$ и

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{3\delta}} \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3\delta y_0^2}{3\delta y_0^2 + 4}} \sin\left(\frac{\sqrt{4 - 3\delta y_0^2}}{2} t\right)\right) \underset{\mathrm{R}}{\Rightarrow} y_0 \sin t \text{ при } \delta \to +0.$$

То есть, в пределе уравнение переходит в линейное, а его приближенное решение при этом в точное решение получающегося линейного уравнения. Заметим, что попытка поменять коэффициенты местами, а затем аналогичным приемом получить приближенное решение уравнения с "мягкой" возвращающей силой $\ddot{x} = -x^3$ приводит к неудовлетворительному результату. Это связанно с тем обстоятельством, что при этом $\beta(\delta) \to +\infty$ и диапазон колебаний в соответствующем уравнении (4) стягивается в точку нуль.

Итак, приближенное решение (6) можно выписать, если оба коэффициента a и b из разложения Тейлора $f(x)$ отрицательны. Покажем, что это условие снимается, если обратиться к гиперболическим функциям. Формулы (4) и (5) при этом перепишутся следующим образом

$$\ddot{x} = -\frac{2\alpha \sinh \beta x}{\cosh^3 \beta x};\ \alpha, \beta > 0;\ x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = y_0 > 0;$$

с решением

$$x\,(t) = \frac{1}{\beta} \sinh^{-1}\left(\sqrt{\frac{\breve{E}}{1 - \breve{E}}} \sin\left(\sqrt{2\alpha\beta(1 - \breve{E})}t\right)\right);\ \breve{E} = \frac{\beta E}{\alpha} < 1.$$

Возникающее здесь ограничение на энергию связанно с тем, что в отличие от рассмотренного ранее случая потенциал $U(x) = \mathrm{th}^2\, x$ (при $\alpha = \beta = 1$) ограничен сверху единицей, и поэтому при большей или равной единице значениях энергии движение не носит колебательного характера. Соответствующая алгебраическая система имеет вид

$$\begin{cases} -2\alpha\beta = a \\ 8\alpha\beta^3 = 3b. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение при любом отрицательном a и любом положительном b

$$\alpha = -a\sqrt{-\frac{a}{3b}} > 0, \beta = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3b}{a}} > 0\,.$$

Аналог формулы (6) записывается следующим образом

$$x(t) = 2\sqrt{-\frac{a}{3b}}\sinh^{-1}\left(\sqrt{\frac{3by_0^2}{4a^2-3by_0^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{4a^2-3by_0^2}}{2\sqrt{|a|}}t\right)\right)$$

В частном случае уравнения математического маятника

$$\ddot{x} = -\sin x\ ;\ x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = y_0 > 0;$$

($a = -1$, $b = 1/6$) применение данной формулы приводит к

$$x(t) = 2\sqrt{2}\sinh^{-1}\left(\frac{y_0}{\sqrt{8-y_0^2}}\sin\left(\sqrt{\left(1-\frac{y_0^2}{8}\right)}t\right)\right)$$

В заключение заметим, что тематика данной работы частично пересекается с давно известной темой эллиптических функций (см., например, [2, § 1.2]). Однако. хотя интегрируемость и обратимость в элементарных функциях – это вопрос терминологии, все же нельзя не согласиться с тем, что манипуляции, например, с функцией sin проще чем с эллиптическими функциями. Также отметим, что результаты данной работы могут быть использованы для уточнения и развития [3–5].

Литература

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
2. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: УРСС, 2001.
3. Москвин А. С., Латыпов Д. Г., Агафонов А. П. Роль скрытых смещений в магнитострикции и пьезомагнитизме ортоферитов//Физика твердого тел. 1987. Т. 29. Выпуск 10, с. 3157–3160.
4. Москвин А. С., Латыпов Д. Г., Гудков В. Г. Природа двупреломления и упругооптических свойств ортоферитов//Физика твердого тел. 1998. Т. 30. Выпуск 2. С.413–419.
5. Gubaidullin M. B. Commensurability and Molchanov's hypothesis // Theoretical and Mathematical Physics. 2016. T.187. №1.С. 570–582.

Статья рекомендована к печати кафедрой математического анализа Башкирского Государственного университета (д.ф.-м.н., проф. Х. К. Ишкин)

Some exactly decided problems about non-linear oscillations

M. B. Gubaidullin*, D. G. Latipov

Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450074 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

**Email: gubm@rambler.ru*

Linearization is a widespread method in theory of differential equations. In particular, it is applied to description of oscillations with a non-linear retracting force. In this article, a procedure supplementing the linearization method is suggested. More exactly, in the Taylor expansion of the retracting force function the cubic term is taken into account. Then by selection of parameters, it is contraposed to a certain non-linear problem, retracting force of which coincides with the problem in question up to cubic terms. Solutions of the problem thus obtained are explicitly written through elementary functions.

Keywords: oscillations, linearization.