О специальном решении уравнения Штурма – Лиувилля с комплексным потенциалом

И. А. Янтурин, Х. К. Ишкин*

Башкирский государственный университет

Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, улица Заки Валиди, 32.

**Email: ishkin62@mail.ru*

Для уравнения Штурма–Лиувилля на полуоси с комплексным гладким потенциалом, имеющим степенной рост α на бесконечности, построено решение $\varphi(x,\lambda)$, которое а) при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит $L^2(0,+\infty)$, б) при каждом $x \geq 0$ является целой функцией λ порядка не выше $1/2 + 1/\alpha$.

Ключевые слова: дифференциальные операторы, решение Вейля, функция Вейля, дискретность спектра.

Введение. При исследовании различных спектральных свойств дифференциальных операторов, порожденных в $L^2(a,b)$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ дифференциальным выражением $l = \sum_{i=0}^{n} q_i(x)(d/dx)^{n-i}$ часто приходится пользоваться специальными решениями уравнения $ly = \lambda y$, обладающими теми или иными свойствами (см., например, [1]). Для оператора Штурма–Лиувилля $ly = -y'' + qy$ наиболее наиболее употребительным в этом отношении служит решение Вейля $\varphi(x,\lambda)$ [2, 3], которое при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит $L^2(a,b)$ и при каждом $x \in (a,b)$ является мероморфной функцией λ. Это решение существует при достаточно широких условиях на потенциал [1]. Если функция q удовлетворяет дополнительным условиям типа гладкости и регулярности поведения на концах интервала (a,b), можно получить ВКБ-асимптотики [4] для $\varphi(x,\lambda)$ и $\varphi'(x,\lambda)$ при фиксированных λ и стремлении x к a или b. Однако часто (см., например, [5]) возникает необходимость в решениях, которые являются целыми функциями λ (при фиксированных x) и допускают асимптотическую оценку по x вблизи концов интервала (a,b) **равномерно по** λ из любого компакта или даже какого-либо сектора комплексной плоскости. Настоящая статья посвящена построению такого решения для уравнения

$$-y'' + qy = \lambda y, x > 0, \tag{1}$$

где достаточно гладкий комплекснозначный потенциал q имеет степенной рост на бесконечности.

Основной результат. На функцию q наложим следующие ограничения:

1) Существует $a > 0$, что $q \in L^1(0,a)$ и $q' \in AC[a,b]$ $\forall b > a$;

2) На $[a,+\infty)$ функции |q| не убывает и при всех x ⩾ a

$$|arg\, q(x)| \leq \pi - \delta, \quad (2)$$

$$|q(x)| \geq C_0 x^{\alpha}, \alpha > 2, \quad (3)$$

где α, δ, C_0 – положительные постоянные;

3) Функция $(q^{-1/4})'' q^{-1/4}$ суммируема на $(a, +\infty)$.

Введем обозначения: $\sqrt[n]{z}$ – ветвь корня, которая положительна при положительных z, $m = [(2 + \alpha)/\, 2\alpha], [x]$ – целая часть числа x,

$$\varphi_0(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{q(x)}} exp\left(-\int_a^x \sqrt{q(t)}dt\right).$$

Теорема 1. Уравнение (1) имеет решение $\varphi = \varphi(x, \lambda)$, обладающее следующими свойствами:

(i) при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$ функция φ принадлежит $L^2[0, +\infty)$ и

$$\varphi(x, \lambda) \backsim \varphi_0(x, \lambda)\left(1 + O\left(x^{-\alpha/2+1}\right)\right), x \to +\infty, \quad (4)$$

где оценка остаточного члена равномерна по λ из любого компакта $K \subset \mathbb{C}$;

(ii) при каждом $x \geq 0$ $\varphi(x, \lambda)$ – целая функция λ порядка, не выше $(2 + \alpha)/2\alpha$.

Следствие. Пусть L – оператор, порожденный в $L^2(0, +\infty)$ дифференциальным выражением $-y'' + qy$, где q удовлетворяет условиям 1) – 3), и краевым условием y(0)=0. Тогда резольвента оператора L принадлежит классу Неймана-Шаттена σ_p, где $p > \frac{2+\alpha}{2\alpha}$, так что оператор L имеет дискретный спектр.

Замечание. Условиям 1) – 3) удовлетворяет, например, функция $q = re^{i\varphi}$, где r, φ – вещественнозначные дважды непрерывно дифференцируемые на $[0, +\infty)$ функции, такие, что

а) при всех $x \geq 0$ $|\varphi(x)| \leq \pi - \delta, \delta > 0, r(x) \geq C_0 x^{\alpha}, \alpha > 2$,

б) $\left(r^{-1/4}\right)'' r^{-1/4}, \left(\varphi'^2 + |\varphi''|\right) r^{-1/2} \in L^1(0, +\infty)$.

Следствие обобщает известное [6] условие дискретности спектра оператора L, полученное В. Б. Лидским еще в 1960 году, которое «работает» только для операторов с потенциалами, вещественная часть которых ограничена снизу, а мнимая – полуограничена, в то время как из условий а) и б) не следует ни ограниченность $Re\, q$ снизу, ни полуограниченность $Im\, q$.

Доказательство. В силу условия 3) уравнение (1) при $\lambda = 0$ имеет решения $u_{\pm}$, для которых справедливы ВКБ-оценки [4]

$$u_{\pm} \sim q^{-1/4} exp\left(\pm \int_0^x \sqrt{q} dt\right), x \to +\infty. \quad (5)$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x,\lambda) = u_- + \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty \big(u_+(x)u_-(t) - u_-(x)u_+(t)\big)\varphi(t,\lambda)dt, x \geq a. \quad (6)$$

Легко проверить, что если уравнение (6) имеет решение, то оно является также решением уравнения (1). Полагая

$$\tilde{\varphi} = \varphi q^{1/4} exp\left(\int_0^x \sqrt{q}dt\right), \tilde{u}_\pm = u_\pm q^{1/4} exp\left(\mp\int_0^x \sqrt{q}dt\right),$$

для $\tilde{\varphi}$ получим уравнение

$$\tilde{\varphi}(x,\lambda) = \tilde{u}_-(x) + \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty \left(exp\left(-\int_x^t \sqrt{q}dt\right)\tilde{u}_+(x)\tilde{u}_-(t) - \tilde{u}_-(x)\tilde{u}_+(t)\right)q^{-1/2}(t)\tilde{\varphi}(t,\lambda)dt. \quad (7)$$

Согласно условию (2) $Re\sqrt{q(x)} > 0$ при $x \geq a$ и в силу (5) функции $\tilde{u}_\pm$ ограничены на $[a,\infty)$, поэтому интегральный оператор A в правой части (7) ограничен в пространстве $C[b,\infty), b \geq a$. Обозначим через $\|A\|_b$ норму оператора A в пространстве $C[b,\infty)$. Тогда

$$\|A\|_b = C|\lambda|\left|\int_b^{+\infty} q^{-1/2}\,dt\right|.$$

Здесь и далее в доказательстве теоремы через C будем обозначать абсолютные (то есть не зависящие от каких-либо параметров) положительные постоянные, точное значение которых нас не интересует. Из условия (3) и последней оценки видно, что для любого $0 < \rho < 1$ найдется постоянная $M_0 > 0$, такая, что

$$\|A\|_b < \rho \quad (8)$$

при

$$b = b_\lambda \coloneqq M_0|\lambda|^{1/\alpha}. \quad (9)$$

Следовательно,

$$sup\,|\varphi\tilde{}(x,\lambda)|_{x\geq b\_\lambda,\lambda\in C} \leq \frac{c_0}{1-\rho_0}\,, \quad (10)$$

где $c_0 = sup_{x\geq 0}|u_-(x)|$.

С другой стороны, индукцией по n легко убедиться, что для любого $f \in C[a,+\infty)$

$$|(A^n f)(x,\lambda)| = \frac{(C|\lambda|)^n}{n!}\left(\int_x^\infty |q|^{-1/2}dt\right)^n sup_{x\geq a}|f(x)|, x \geq a. \quad (11)$$

Отсюда следует, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n(\tilde{u}_-)(x,\lambda)$$

сходится равномерно по $x \geq a$ и λ из любого компакта $K \subset \mathbb{C}$, его сумма $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет уравнению (7), при каждом λ ограничена на $[a,+\infty)$ и при каждом $x \geq a$ является целой функцией λ. Продолжим функцию

$$\varphi = \tilde{\varphi}q^{-1/4} exp\left(-\int_0^x \sqrt{q}dt\right) \quad (12)$$

на отрезок $[0,a]$ как решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$\varphi^{(k)}(a,\lambda)=\frac{d^k}{dx^k}\left[\tilde{\varphi}(x,\lambda)q^{-1/4}(x)\,exp\left(-\int_0^x\sqrt{q}dt\right)\right]\Big|_{x=a},k=0.1.$$

В силу перечисленных выше свойств $\tilde{\varphi}$ и соотношения (12) функция φ удовлетворяет оценке (4) при $m=0$ и является целой по λ при каждом $x\geq 0$.

Докажем утверждение о порядке. Из соотношений (12) и (10) следует, что

$$sup_{x\geq b_\lambda,\lambda\in\mathbb{C}}|\varphi(x,\lambda)|\leq C/(1-\rho),$$

поэтому задача сводится к получению оценки величины $sup_{x\geq b_\lambda,\lambda\in\mathbb{C}}|\varphi(x,\lambda)|$.

Для этого введем в рассмотрение решения $s(x,\lambda)$ и $c(x,\lambda)$ уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$s(0,\lambda)=c'(0,\lambda)=0,c(0,\lambda)=s'(0,\lambda)=1.$$

Легко проверить, что функция s является решением следующего уравнения

$$s(x,\lambda)=s_0(x,\lambda)-\tfrac{\lambda}{2}\textstyle\int_0^x\big(u_+(x)u_-(t)-u_-(x)u_+(t)\big)s(t,\lambda)dt, \tag{13}$$

$$s_0(x,\lambda)=\big(u_+(x)u_-(0)-u_-(x)u_+(0)\big)/2. \tag{14}$$

Введем функцию $\tilde{s}=sq^{1/4}\,exp\big(-\int_0^x\sqrt{q}dt\big)$, и рассуждая так же, как при выводе оценки (11), получим

$$|s(x,\lambda)|\leq C\exp\Big(\textstyle\int_0^x\Big(C|\lambda||q|^{-\frac{1}{2}}+|q|^{\frac{1}{2}}\Big)dt\Big),\lambda\in\mathbb{C}, \tag{15}$$

равномерно по $x\in[0,b_\lambda]$, где b_λ определяется соотношениями (9) и (8). Дифференцируя обе части (13) по x и используя оценку (15), убеждаемся, что $s'(x,\lambda)$ удовлетворяет оценке вида (15). Аналогично доказывается, что $c(x,\lambda)$ и $c'(x,\lambda)$ также удовлетворяют оценке вида (15). Учитывая условие (3), легко показать, что

$$\int_0^x(C|\lambda||q|^{-1/2}+|q|^{1/2})dt\leq C|\lambda|^{(2+\alpha)/2\alpha},x\in[0,b_\lambda],$$

следовательно,

$$\big|s^{(k)}(x,\lambda)\big|\leq\exp\big(C|\lambda|^{(2+\alpha)/2\alpha}\big),$$

$$\big|c^{(k)}(x,\lambda)\big|\leq\exp\big(C|\lambda|^{(2+\alpha)/2\alpha}\big),x\in[0,b_\lambda],\lambda\in\mathbb{C}. \tag{16}$$

Теперь утверждение о порядке функции $\varphi(x,\cdot)$ следует из оценок (16) и представления

$$\varphi(x,\lambda)=c_1s(x,\lambda)+c_2c(x,\lambda),x\in[0,b_\lambda],$$

где $c_1(\lambda)=(c\varphi'-c'\varphi)(b_\lambda,\lambda),c_2(\lambda)=(\varphi s'-s\varphi')(b_\lambda,\lambda)$. Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №15–01–01095.

Литература

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
2. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
3. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит. 2007.
4. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
5. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Спектральные свойства комплексного оператора Эйри на полуоси // Функц. анализ и его прил. Т.51, №1. 2017. С.82–98.
6. Лидский В. Б. Несамосопряженный оператор типа Штурма–Лиувилля с дискретным спектром // Тр. ММО. Т.9. 1960. С.45–79.

Статья рекомендована к печати кафедрой математического анализа БашГУ
(докт. физ. мат. наук, проф. Х. К. Ишкин)

Special solution of the Sturm–Liouville equation with a complex potential

I. A. Yanturin, Kh. K. Ishkin*

Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450074 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

**Email: ishkin62@mail.ru*

For a singular Sturm–Liouville equation with a complex smooth increasing potential we construct a special solution $\varphi(x,\lambda)$ with following properties: a) for each $\lambda \in \mathbb{C}$ $\varphi(\cdot,\lambda) \in L^2(0,+\infty)$, b) for each $x \geq 0$ $\varphi(x,\cdot)$ – an entire function of order $1/2 + 1/\alpha$.

Keywords: differential operators, Weyl solution, Weyl function, discretness of spectrum.